Eine Klasse von Ellipsenflächen

Herrn Heinz Kunle zum 50. Geburtstag gewidmet

Vogel, Walter Oskar

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 31, 1980,
S.73-81

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Eine Klasse von Ellipsenflächen

Herrn Heinz Kunle zum 50. Geburtstag gewidmet

Von **W. O. Vogel,** Karlsruhe

Vorgelegt von H. R. Müller

(Eingegangen am 24. 9. 1979)

Eine Ellipsenfläche ist eine von einer einparametrigen Schar von Ellipsen erzeugte Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum. Die hier betrachtete Klasse besteht aus den Ellipsenflächen mit den Eigenschaften: 1. die Fläche ist ein Teil einer C^4-Eifläche[1]), d.h. einer geschlossenen Fläche der Klasse C^4 mit positiver Gaußscher Krümmung $K>0$, 2. die erzeugenden Ellipsen sind kongruente Ellipsen, im Sonderfall kongruente Kreise, und 3. die Fläche ist nach W. Degen[2]) vom hyperbolischen Typ, d.h. jede Erzeugende der von den Ellipsenebenen eingehüllten Torse schneidet die zugehörige erzeugende Ellipse in zwei (reellen) Punkten. Wir nennen diese Flächen kurz K-Ellipsenflächen.

In der vorliegenden Note werden lokale Eigenschaften dieser Flächen untersucht. Nach Aufstellen der Grundgleichungen wird bewiesen, daß jede K-Ellipsenfläche ein Stück einer Quadrik ist. Es folgen Beispiele, die zeigen, daß eine Ellipsenfläche keine Quadrik sein muß, wenn eine der genannten Eigenschaften nicht erfüllt ist. Schließlich wird noch untersucht, unter welchen zusätzlichen Bedingungen eine K-Ellipsenfläche eine Drehquadrik ist.

In einer späteren Note werden kinematische und globale Fragen der K-Ellipsenflächen behandelt werden.

1. Die Grundgleichungen

Eine Ellipsenfläche Φ sei eine Abbildung

(1) $\quad \mathbf{x}\colon [0,1]\times S^1 \to E^3$

der Klasse C^4 mit der Darstellung

(2) $\quad \mathbf{x}(u,v) = \mathbf{y}(u) + \cos v\, \mathbf{a}(u) + \sin v\, \mathbf{b}(u),$

wo

(3) $\quad \mathbf{a}(u)\, \mathbf{b}(u) = 0;\ \ u \in [0,1] \subset \mathbf{R},\ \ v \in \mathbf{R}.$

[1]) W. BLASCHKE, K. LEICHTWEISS [2], S. 239, 257.

[2]) W. DEGEN [4], S. 1.

Gemäß der 2. Eigenschaft sind die erzeugenden Ellipsen kongruent, so daß noch

(4) $\mathbf{a}^2(u) = \text{const} \neq 0, \ \mathbf{b}^2(u) = \text{const} \neq 0$

gilt. Wir verwenden $\{\mathbf{a}(u), \mathbf{b}(u), \mathbf{a}\times\mathbf{b}(u)\}$ als das in den Punkten der erzeugenden Ellipse e(u), u = const, angeheftete „begleitende Dreibein" der Fläche und machen im folgenden von den „Ableitungsgleichungen" Gebrauch:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \mathbf{y}' &= \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3\, \mathbf{a}\times\mathbf{b} \\ \mathbf{a}' &= \varrho_1 \mathbf{a} + \varrho_2 \mathbf{b} + \varrho_3\, \mathbf{a}\times\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= \sigma_1 \mathbf{a} + \sigma_2 \mathbf{b} + \sigma_3\, \mathbf{a}\times\mathbf{b} \\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})' &= -\varrho_3\, \mathbf{b}^2\mathbf{a} - \sigma_3\, \mathbf{a}^2\mathbf{b} + (\varrho_1 + \sigma_2)\, \mathbf{a}\times\mathbf{b}, \end{aligned}$$

wo ′ die Ableitung nach u bedeutet. Wegen (3), (4) ist dabei

(6) $\varrho_2\, \mathbf{b}^2 + \sigma_1\, \mathbf{a}^2 = 0, \ \varrho_1 = 0, \ \sigma_2 = 0.$

Wir berücksichtigen weiter die 3. Eigenschaft, daß die Ellipsenfläche vom hyperbolischen Typ ist. Die Erzeugende der von den Ellipsenebenen eingehüllten Torse, die in der Ellipsenebene u = const. liegt (d.h. die Schnittgerade der beiden Ellipsenebenen, die zu den Parametern u und u + du gehören), ist gegeben durch

(7) $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \mu\, \mathbf{a} + \nu\, \mathbf{b}$

mit

(8) $\lambda_3 + \varrho_3\, \mu + \sigma_3\, \nu = 0.$

Die Schnittpunkte mit der erzeugenden Ellipse e(u) erhält man daher aus

(9) $\lambda_3 + \varrho_3 \cos v + \sigma_3 \sin v = 0.$

Ist $\varrho_3 = \sigma_3 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, so ist die Erzeugende die Ferngerade der Ellipsenebene u = const. Ist $\varrho_3 = \sigma_3 = \lambda_3 = 0$, so ist die Ellipsenebene stationär und die Erzeugende unbestimmt. Im ersten Fall schneidet die Erzeugende die Ellipse nicht, den zweiten Fall schließen wir vorläufig aus und werden an gegebener Stelle darauf zurückkommen. Damit ist also stets

(10) $\varrho_3^2 + \sigma_3^2 > 0,$

und die Schnittpunkte der Erzeugenden mit der Ellipse lauten nach (2), (9)

(11) $\mathbf{x}_i = \mathbf{y} + \cos v_i\, \mathbf{a} + \sin v_i\, \mathbf{b}, \quad i \in \{1,2\},$

wo

$$(12)\qquad \cos v_1 = \frac{-\lambda_3\varrho_3 + \sigma_3\sqrt{\varrho_3^2 + \sigma_3^2 - \lambda_3^2}}{\varrho_3^2 + \sigma_3^2}, \quad \sin v_1 = \frac{-\lambda_3\sigma_3 - \varrho_3\sqrt{\varrho_3^2 + \sigma_3^2 - \lambda_3^2}}{\varrho_3^2 + \sigma_3^2}$$

und entsprechend $\cos v_2$, $\sin v_2$ mit dem anderen Wurzelvorzeichen. Diese Schnittpunkte sind genau dann reell verschieden, wenn

(13) $\varrho_3^2 + \sigma_3^2 - \lambda_3^2 > 0.$

Wir nennen diese beiden Punkte die „singulären Punkte“ der Ellipse e(u).

Um die 1. Eigenschaft auszunützen, berechnen wir die Gaußsche Krümmung K(u,v); insbesondere in den singulären Punkten der Ellipse e(u) erhält man

$$K(u,v_i) = \frac{-(\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v\mathbf{x}_{uv})^2}{(\lambda_1 \cos v_i + \lambda_2 \sin v_i + (\varrho_2+\sigma_1)\cos v_i \sin v_i)^4\, \mathbf{a}^4\mathbf{b}^4}\,, \tag{14}$$

wo $(\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v\mathbf{x}_{uv})$ das Spatprodukt der Ableitungen $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}$ an den Stellen (u,v_i) ist. Da $K > 0$, verschwindet der Nenner von (14), d.h. es ist

$$\lambda_1 \cos v + \lambda_2 \sin v + (\varrho_2+\sigma_1)\cos v \sin v = 0 \tag{15}$$

für alle v, welche Lösung von (9) sind. Es gibt also eine Zerlegung der Form

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cos v + \lambda_2 \sin v + (\varrho_2+\sigma_1)\cos v \sin v &= \\ = (A+B\cos v + C \sin v)\,(\lambda_3+\varrho_3\cos v + \sigma_3 \sin v)&\end{aligned} \tag{16}$$

mit Funktionen A(u), B(u), C(u). Nach (16) ist dabei

$$\begin{aligned}&\lambda_3 A + \sigma_3 C = 0,\ \ \varrho_3 A + \lambda_3 B = \lambda_1,\ \ \sigma_3 A + \lambda_3 C = \lambda_2,\\ &\varrho_3 B - \sigma_3 C = 0,\ \ \sigma_3 B + \varrho_3 C = \varrho_2 + \sigma_1.\end{aligned} \tag{17}$$

Äquivalent dazu sind die folgenden fünf Gleichungen, bestehend aus den Auflösungen nach A, B, C und zwei Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten $\lambda_k, \varrho_k, \sigma_k$, $k \in \{1,2,3\}$ der Ableitungsgleichungen (5). Aus den beiden letzten Gleichungen von (17) erhält man

$$B = \frac{\sigma_3(\varrho_2+\sigma_1)}{\varrho_3^2+\sigma_3^2},\quad C = \frac{\varrho_3(\varrho_2+\sigma_1)}{\varrho_3^2+\sigma_3^2}, \tag{18}$$

die 2. und 3. Gleichung von (17) liefern

$$A = \frac{\lambda_1\varrho_3+\lambda_2\sigma_3}{\varrho_3^2+\sigma_3^2} - \frac{2\lambda_3\varrho_3\sigma_3(\varrho_2+\sigma_1)}{(\varrho_3^2+\sigma_3^2)^2} \tag{19}$$

und

$$(\lambda_1\sigma_3 - \lambda_2\varrho_3)(\varrho_3^2+\sigma_3^2) + \lambda_3(\varrho_2+\sigma_1)(\varrho_3^2-\sigma_3^2) = 0. \tag{20}$$

Einsetzen von (18), (19) in die 1. Gleichung von (17) ergibt

$$\lambda_3(\lambda_1\varrho_3+\lambda_2\sigma_3)(\varrho_3^2+\sigma_3^2) + \varrho_3\sigma_3(\varrho_2+\sigma_1)(\varrho_3^2+\sigma_3^2-2\lambda_3^2) = 0. \tag{21}$$

Die Formeln (20), (21) ergeben sich auch direkt, wenn man (12) in (15) einsetzt.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}&D = -3\lambda_3 A^2,\ \ E = \varrho_3 A^2 + 2\varrho_3 B^2 - \sigma_1 C,\\ &F = \sigma_3 A^2 + 2\sigma_3 C^2 - \varrho_2 B\end{aligned} \tag{22}$$

lautet nunmehr die Gaußsche Krümmung

$$K = \frac{D - A' + (E+\varrho_3\mathbf{b}^2 - B')\cos v + (F+\sigma_3\,\mathbf{a}^2 - C')\sin v}{(\lambda_3+\varrho_3\cos v + \sigma_3 \sin v)\,(\cos^2 v\mathbf{b}^2 + \sin^2 v\mathbf{a}^2 + (A+B\cos v + C\sin v)^2)^2}\,. \tag{23}$$

Wegen der Beschränktheit von K verschwindet der Zähler von (23) für alle v, für die $\lambda_3 + \varrho_3 \cos v + \sigma_3 \sin v = 0$. Also ist

$$\begin{aligned} &D - A' = \varkappa\lambda_3, \quad E + \varrho_3 \mathbf{b}^2 - B' = \varkappa\varrho_3, \\ &F + \sigma_3 \mathbf{a}^2 - C' = \varkappa\sigma_3 \end{aligned} \tag{24}$$

und

$$K = \frac{\varkappa}{(\cos^2 v \mathbf{b}^2 + \sin^2 v \mathbf{a}^2 + (A + B\cos v + C\sin v)^2)^2} \tag{25}$$

mit

$$\varkappa(u) > 0. \tag{26}$$

Nach (22), (24) genügen daher A, B, C den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} A' &= -3\lambda_3 A^2 - \lambda_3\varkappa \\ B' &= \varrho_3 A^2 + 2\varrho_3 B^2 - \sigma_1 C + \varrho_3 \mathbf{b}^2 - \varrho_3\varkappa \\ C' &= \sigma_3 A^2 + 2\sigma_3 C^2 - \varrho_2 B + \sigma_3 \mathbf{a}^2 - \sigma_3\varkappa. \end{aligned} \tag{27}$$

Wir suchen jetzt noch eine Differentialgleichung für $\varkappa$. Für den Normaleinheitsvektor $\mathbf{n}(u,v)$ im Flächenpunkt $\mathbf{x}(u,v)$ erhält man unter Verwendung von (16), (25)

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt[4]{K}}{\sqrt[4]{\varkappa}\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\left(-\cos v\, \mathbf{b}^2\mathbf{a} - \sin v\, \mathbf{a}^2\mathbf{b} + (A + B\cos v + C\sin v)\, \mathbf{a}\times\mathbf{b}\right). \tag{28}$$

Eine nähere Betrachtung zeigt, daß $\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{x}(u_0,v_0)$ zwei verschiedene (reelle) Lösungen $v = v(u)$ und ebenso zwei Lösungen $v_0 = v_0(u)$ hat, sofern u hinreichend nahe bei (festem) u_0 liegt. Dies folgt aus der 1. und 3. Eigenschaft der Flächen. Wegen der 1. Eigenschaft sind, nach Einsetzen dieser Lösungen, $\mathbf{n}(u,v) - \mathbf{n}(u_0,v_0) = \mathbf{o}$, $K(u,v) - K(u_0,v_0) = 0$ Identitäten in u. Aus diesen Identitäten erhält man, unter Verwendung von (28), durch zweimaliges Ableiten nach u und Grenzübergang $u \to u_0$

$$\varkappa' = 8\varrho_3 B\varkappa \tag{29}$$

an der Stelle u_0 und, da diese Überlegung an jeder Stelle $u_0 \in [0,1]$ gemacht werden kann, für alle u. Die Gleichungen (17) und die Differentialgleichungen (27), (29) sind die weiterhin benötigten Grundgleichungen der K-Ellipsenflächen.

2. K-Ellipsenflächen als Quadriken

Für die hier betrachteten Ellipsenflächen gilt

Satz 1. Jede K-Ellipsenfläche ist ein Stück einer Quadrik.

Beweis. Wir verwenden dazu Ergebnisse der affinen Differentialgeometrie nach W. Blaschke. Für die Fundamentalgrößen G_{ik} der quadratischen Grundform der K-Ellipsenflächen in der affinen Differentialgeometrie findet man[3])

[3]) W. BLASCHKE [1], S. 152 (108), (111).

$$
\begin{aligned}
G_{11} = {} & |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\varkappa^{-1/4}[-\varrho_2\sigma_1 - \lambda_2\sigma_1 \cos v - \lambda_1\varrho_2 \sin v + \\
& + (A+B\cos v + C\sin v)\,(\lambda_1\varrho_3 + \lambda_2\sigma_3 + \varrho_2\sigma_3\cos v + \sigma_1\varrho_3 \sin v) + \\
& + (\lambda_3 + \varrho_3\cos v + \sigma_3 \sin v)\,(-A' + (\varrho_3\mathbf{b}^2 - B')\cos v + \\
& + (\sigma_3\mathbf{a}^2 - C')\sin v)] \\
G_{12} = {} & |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\varkappa^{-1/4}(\sigma_3 B - \sigma_1 + \sigma_3 A\cos v - \varrho_3 A \sin v) = G_{21} \\
G_{22} = {} & |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\varkappa^{-1/4}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Die Fundamentalgrößen A_{ikl} der kubischen Grundform berechnen sich dann durch die Formeln[4])

$$
A_{ikl} = \frac{\partial^3\mathbf{x}}{\partial u^i\,\partial u^k\,\partial u^l}\mathbf{X} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial G_{kl}}{\partial u^i} + \frac{\partial G_{li}}{\partial u^k}\right),
\tag{31}
$$

wo $u^1 = u$, $u^2 = v$ und[5])

$$
\mathbf{X} = |\mathbf{a}|^{-1}|\mathbf{b}|^{-1}\varkappa^{-1/4}(-\cos v\,\mathbf{b}^2\mathbf{a} - \sin v\,\mathbf{a}^2\mathbf{b} + (A+B\cos v + C\sin v)\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}).
\tag{32}
$$

Der bekannte Satz von G. Pick besagt[6]), daß eine Fläche genau dann eine Quadrik (Fläche 2. Ordnung) ist, wenn ihre kubische Grundform verschwindet, d.h. wenn alle $A_{ikl} = 0$.

Nach (2), (30) ist

$$
\mathbf{x}_{vvv} = \sin v\,\mathbf{a} - \cos v\,\mathbf{b},\quad \frac{\partial G_{22}}{\partial v} = 0
\tag{33}
$$

und daher zunächst $A_{222} = 0$ nach (31), (32). Weiter ist

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{x}_{vvu} = -\sigma_1 \sin v\,\mathbf{a} - \varrho_2\cos v\,\mathbf{b} + (-\varrho_3\cos v - \sigma_3 \sin v)\,\mathbf{a}\times\mathbf{b} \\
& \frac{\partial G_{22}}{\partial u} = -\frac{1}{4}\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\varkappa^{-5/4}\varkappa' \\
& \frac{\partial G_{12}}{\partial v} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\varkappa^{-1/4}(-\sigma_3 A\sin v - \varrho_3 A\cos v)
\end{aligned}
\tag{34}
$$

und nach (17), (31), (32)

$$
A_{221} = \frac{1}{8}\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\varkappa^{-5/4}\varkappa' \;-\; |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\varkappa^{-1/4}\varrho_3 B.
\tag{35}
$$

Wegen (29) folgt hieraus $A_{221} = 0$. Mit etwas mehr Rechenaufwand läßt sich zeigen, daß auch A_{211}, A_{111} verschwinden. Man hat dazu insbesondere nach (2), (30) $\mathbf{x}_{vuu}$, $\mathbf{x}_{uuu}$ sowie $\frac{\partial G_{12}}{\partial u}, \frac{\partial G_{11}}{\partial v}, \frac{\partial G_{11}}{\partial u}$ zu berechnen, wobei auch die zweiten Ableitungen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \varrho_2, \varrho_3, \sigma_1, \sigma_3, A, B, C$ auftreten. Diese lassen sich mit Hilfe der Grundgleichungen (17), (27), (29) und deren Ableitungen wieder durch $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \sigma_3, A, B, C, \varkappa$ ausdrücken. Wir wollen hierauf jedoch nicht näher eingehen. □

---

[4]) W. BLASCHKE [1], S. 153 (114), (117).
[5]) W. BLASCHKE [1], S. 152 (112).
[6]) W. BLASCHKE [1], S. 228.

3. Beispiele

Wir betrachten in einem euklidischen Raum E^3 eine einparametrige Schar von Ellipsen mit einem festen Mittelpunkt 0 und einer gemeinsamen ersten Achse, auf der zwei gemeinsame Scheitel liegen. Die zweiten Achsen liegen in der Orthogonalebene, und die zugehörigen Scheitel mögen eine bezüglich 0 zentralsymmetrische Eilinie beschreiben, die kein Kegelschnitt sei. Man zeigt leicht, daß die so entstehende Fläche Φ die 1. und 3., aber nicht die 2. Eigenschaft besitzt. Φ ist keine Quadrik.

Eine geeignet gewählte Ebene schneidet aus einem einschaligen Drehhyperboloid eine Ellipse e_0 aus, deren eine Achse die Drehachse a des Hyperboloids trifft. Diese Ellipse erzeugt durch Rotation um die Achse a einen Teil des Hyperboloids, d.h. eine Ellipsenfläche Φ_0, welche die Eigenschaften 2 und 3, aber nicht die Eigenschaft 1 hat. Dreht man nun die Ellipse e_0 um ihre die Drehachse a schneidende Ellipsenachse um einen Winkel α in die Lage e_α, so erhält man durch Rotation der Ellipse e_α um die Drehachse a eine neue Ellipsenfläche Φ_α. Man kann leicht zeigen, daß bei geeignetem (kleinem) Winkel α auch die Fläche Φ_α die Eigenschaften 2 und 3, aber nicht die Eigenschaft 1 besitzt, und daß Φ_α keine Quadrik ist.

Ein Beispiel einer Ellipsenfläche Φ mit positiver Gaußscher Krümmung $K > 0$, welche von kongruenten Kreisen erzeugt wird und bei der die 3. Eigenschaft verletzt ist, ist in [6] untersucht worden[7]). Auch diese Fläche ist keine Quadrik.

Wir betrachten schließlich noch jene Flächen Φ mit den Eigenschaften 1 und 3, bei denen die erzeugenden Kurven kongruente Kreise sind. Zunächst gilt $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$, und nach (6) ist $\varrho_2 + \sigma_1 = 0$. Die Gleichungen (18) liefern $B = 0$, $C = 0$; damit lauten (27), (29)

$$(36) \quad \begin{aligned} A' &= -\lambda_3 (3A^2 + \varkappa) \\ 0 &= \varrho_3 (A^2 + \mathbf{a}^2 - \varkappa) \\ 0 &= \sigma_3 (A^2 + \mathbf{a}^2 - \varkappa) \\ \varkappa' &= 0. \end{aligned}$$

Wegen (10) ist also $A^2 + \mathbf{a}^2 - \varkappa = 0$, d.h. $A = \text{const}$, $A' = 0$, und nach der 1. Gleichung von (36) wird $\lambda_3 = 0$. Gleichung (5) zeigt, daß der Tangentenvektor $\mathbf{y}'$ der Mittelpunktskurve $\mathbf{y}$ in der zugehörigen Kreisebene liegt. Für die Gaußsche Krümmung findet man nach (25)

$$(37) \quad K = \frac{1}{\varkappa} = \text{const}.$$

In Übereinstimmung mit einem früheren Resultat[8]) gilt

Satz 2. Eine K-Ellipsenfläche, die von kongruenten Kreisen erzeugt wird, ist ein Stück einer Sphäre.

---

[7]) W. O. VOGEL [6], S. 71 ff. und Abb. 1, S. 73.

[8]) In [5], S. 32, Sätze 3, 4 und S. 36, Satz 5 wird unter teilweise schwächeren als den hier gemachten Voraussetzungen an die Kreisfläche Φ gezeigt, daß Φ ein sphärisches Flächenstück ist.

Beweis. Nach Satz 1 ist die K-Ellipsenfläche ein Stück einer Quadrik. Eine Quadrik mit konstanter positiver Gaußscher Krümmung $K > 0$ ist eine Sphäre. □

4. K-Ellipsenflächen als Drehquadriken

Wir stellen zunächst einen Satz voran, den wir später benötigen und der nicht nur für K-Ellipsenflächen gilt.

Satz 3. Eine von kongruenten Ellipsen erzeugte Ellipsenfläche mit positiver Gaußscher Krümmung $K > 0$, bei der die Mittelpunktskurve und eine Achse der erzeugenden Ellipsen in einer Ebene η liegen, während die andere Achse auf η senkrecht steht, ist eine Drehfläche mit einer Drehachse senkrecht auf η.

Beweis. Wir gehen aus von einer Ellipsenfläche Φ mit der Darstellung (2) und den Ableitungsgleichungen (5). Wir nehmen an, daß die Ellipsenachsen mit den Achsenvektoren $\mathbf{a}$ in η liegen und $\mathbf{b} = \text{const}$ auf η senkrecht steht. Da auch $\mathbf{y}'$ in η liegt, gilt in (5) $\lambda_2 = 0$, $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Die weiteren Formeln in 1. können i.a. nicht verwendet werden, da Φ keine K-Ellipsenfläche sein muß. Wir berechnen daher die Gaußsche Krümmung K direkt aus (2) und erhalten, wenn wir beachten, daß $K > 0$ und beschränkt ist,

$$\varrho_3\,(\varrho_3'\lambda_1 - \varrho_3\lambda_1') = 0, \quad \lambda_3 = 0 \tag{38}$$

und

$$K = \frac{(\lambda_1{}^2 + \varrho_3{}^2\,\mathbf{b}^2)\,\varrho_3{}^2}{(\varrho_3{}^2\,(\cos^2 v\,\mathbf{b}^2 + \sin^2 v\,\mathbf{a}^2) + \lambda_1{}^2)^2}. \tag{39}$$

Ist $\lambda_1 = 0$ in einem Intervall, so gilt nach (5) und oben $\mathbf{y}' = \mathbf{o}$, also $\mathbf{y} = \text{const}$. Ist $\lambda_1 \neq 0$ an einer Stelle u_0, so auch $\varrho_3 \neq 0$, da sonst $K = 0$ nach (39). Für die Krümmung k der Kurve $\mathbf{y}$ erhält man wegen (38)

$$k = \frac{\varrho_3}{\lambda_1}\left|\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right| = \text{const}, \tag{40}$$

d.h. $\mathbf{y}$ ist ein Kreis. Im ersten Fall ist Φ eine Drehfläche, deren Drehachse im Punkt $\mathbf{y} = \text{const}$ auf η senkrecht steht. Im zweiten Fall sind wegen $\mathbf{y}' = \lambda_1\mathbf{a}$ die Ellipsenachsen mit den Achsenvektoren $\mathbf{a}$ Tangenten an den Kreis $\mathbf{y}$. Die Drehachse der Drehfläche Φ geht durch den Mittelpunkt dieses Kreises und steht, ebenso wie die Ellipsenachsen mit dem Achsenvektor $\mathbf{b} = \text{const}$, senkrecht auf η. □

Als Gegenstück zu Satz 2 gilt

Satz 4. Eine K-Ellipsenfläche, deren erzeugenden Kurven keine Kreise sind, ist genau dann eine Drehquadrik, wenn

$$\lambda_3\varrho_3\sigma_3 = 0. \tag{41}$$

Beweis. Wir gehen aus von (41) und zeigen zunächst, daß dann $\lambda_3 = 0$, $\varrho_3 = 0$, $\sigma_3 \neq 0$ oder $\lambda_3 = 0$, $\sigma_3 = 0$, $\varrho_3 \neq 0$ für $u \in [0,1]$. Wäre $\lambda_3 \neq 0$ an einer Stelle u_0, so $\varrho_3\sigma_3 = 0$

und wegen (10) o.B.d.A. $\varrho_3 = 0$, $\sigma_3 \neq 0$ in einer Umgebung von u_0. Die Gleichung (21) lieferte $\lambda_2 = 0$, nach (19) wäre $A = 0$, $A' = 0$ und (27) ergäbe $\varkappa = 0$ im Widerspruch zu (26). Damit gilt zunächst $\lambda_3 = 0$ für $u \in [0,1]$. Jetzt folgt aus (21)

$$(42) \qquad \varrho_3 \sigma_3 (\varrho_2 + \sigma_1) = 0.$$

Wäre $\varrho_3 \sigma_3 \neq 0$ an einer Stelle u_0, so wäre $\varrho_2 + \sigma_1 = 0$ in einer Umgebung von u_0, nach (18) $B = 0$, $C = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$ und nach (27) $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit gilt $\varrho_3 \sigma_3 = 0$ für $u \in [0,1]$. Aus (10) folgt die obige Behauptung.

Wir betrachten weiterhin o.B.d.A. den Fall $\lambda_3 = 0$, $\varrho_3 = 0$, $\sigma_3 \neq 0$ für $u \in [0,1]$. Nach (20) ist $\lambda_1 = 0$, nach (27) $A' = 0$. Im ersten Fall sei $\lambda_2 = 0$ an einer Stelle u_0. Nach (19) ist dort $A = 0$, und wegen $A' = 0$ gilt sogar $A = 0$ und $\lambda_2 = 0$ für $u \in [0,1]$. Nach (5) ist $\mathbf{y}' = \mathbf{o}$, und die Mittelpunktskurve $\mathbf{y}$ ist in einen Punkt 0 ausgeartet. Die Gleichungen (18), (27) liefern mit (6)

$$(43) \qquad B = \frac{\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2}{\mathbf{b}^2} \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \quad C = 0, \quad B' = 0.$$

Wir erhalten damit einen konstanten Vektor

$$(44) \qquad \mathbf{d} = \mathbf{b}^2 \mathbf{a} - c\, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{o}; \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = c = \text{const}$$

und eine Gerade d durch 0 mit dem Richtungsvektor $\mathbf{d}$. Für alle $u \in [0,1]$ schließen die in 0 angebrachten Achsenvektoren $\mathbf{a}(u), \mathbf{b}(u)$ der erzeugenden Ellipse e(u) und der Normalenvektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}(u)$ der Ellipsenebene mit dem Vektor $\mathbf{d}$ feste Winkel ein. Die K-Ellipsenfläche ist eine Drehfläche, deren erzeugenden Ellipsen aus einer festen Ellipse durch Rotation um die Achse d entstehen.

Im zweiten Fall sei $\lambda_2 \neq 0$ für alle u. Für die Krümmung k und die Torsion τ der Mittelpunktskurve $\mathbf{y}$ findet man nach leichter Rechnung

$$(45) \qquad k = \text{const} \neq 0, \quad \tau = 0,$$

d.h. $\mathbf{y}$ ist ein Kreis $\mathcal{K}$. Auch hier gelten die Gleichungen (43), (44). Seien 0 der Mittelpunkt des Kreises $\mathcal{K}$ und d die Gerade durch 0 mit dem festen Richtungsvektor $\mathbf{d}$. Wegen

$$(46) \qquad \mathbf{y}' \times \mathbf{y}'' = \lambda_2^2 \sigma_3 \mathbf{d} \neq \mathbf{o}$$

ist $\mathbf{d}$ der Normalenvektor der Kreisebene. Die im Mittelpunkt M(u) einer erzeugenden Ellipse e(u) angebrachten Vektoren $\mathbf{a}(u)$, $\mathbf{b}(u)$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}(u)$ schließen mit $\mathbf{d}$ feste Winkel ein. Wegen $\mathbf{y}' = \lambda_2 \mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ ist die Ellipsenachse in Richtung $\mathbf{b}(u)$ die Tangente des Kreises $\mathcal{K}$ in M(u), und die K-Ellipsenfläche ist eine Drehfläche mit der Drehachse d.

Sei umgekehrt die K-Ellipsenfläche Φ eine Drehquadrik, die durch Rotation einer erzeugenden Ellipse e um eine Drehachse d entsteht. Dann ist $\mathbf{y}' = \mathbf{o}$ oder ein Vektor in Richtung $\mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{b}$ und daher $\lambda_3 = 0$. Also gilt (41). Wird die Drehfläche Φ nicht nur durch Rotation einer Ellipse e um die Drehachse d erzeugt, so kann man sie – wie man leicht bestätigt – auch so gewinnen wie die Fläche in Satz 3. Da nun η eine beliebige Ebene durch d sein kann, ist Φ eine Quadrik mit unendlich vielen Drehachsen, also eine Kugel. Deren ebene Kurven sind jedoch Kreise, was wir in Satz 4 ausgeschlossen haben. □

Wir schließen mit drei einfachen Anwendungen.

Satz 5. Eine K-Ellipsenfläche, deren erzeugenden Ellipsen einen festen Mittelpunkt haben, ist ein Stück einer Drehquadrik.

Satz 6. Eine K-Ellipsenfläche, deren Ellipsenebenen die Tangenten der Mittelpunktskurve enthalten, ist ein Stück einer Drehquadrik.

Satz 7. Eine K-Ellipsenfläche, bei der die Erzeugenden der von den Ellipsenebenen eingehüllten Torse parallel sind zu den Achsen der erzeugenden Ellipsen, ist ein Stück einer Drehquadrik.

Die Richtigkeit folgt unmittelbar aus den Sätzen 2 und 4. Im ersten Fall ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, im zweiten Fall $\lambda_3 = 0$ und im dritten Fall $\varrho_3 = 0$ bzw. $\sigma_3 = 0$.

Literatur

[1] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie II. 2. Auflage, Springer, Berlin 1923.

[2] BLASCHKE, W. – LEICHTWEISS, K.: Elementare Differentialgeometrie. 5. Auflage, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1973.

[3] BRAUNER, H.: Quadriken als Bewegflächen. Monatshefte f. Math. 59, 45–63 (1955).

[4] DEGEN, W.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Flächen, die von einer einparametrigen Schar von Kegelschnitten erzeugt werden, I. Grundzüge der Theorie im elliptischen und hyperbolischen Fall. Math. Annalen 155, 1–34 (1964).

[5] VOGEL, W. O.: Eiflächen, die von einer einparametrigen Schar kongruenter Kreise vollständig bedeckt werden. Math. Nachrichten 22, 27–45 (1960).

[6] VOGEL, W. O.: Flächen, die von einer einparametrigen Schar kongruenter Kreise erzeugt werden. Monatshefte f. Math. 66, 61–78 (1962).